Es. 1: Sia $A \subseteq \{1,..,n\}$ un sottoinsieme tale che la somma

$W = \sum_{i \in A} V_i$ è una somma diretta, e tale che A sia

massimale rispetto a questa proprietà. Dim. che $W = V$.

Sia V_j con $j \in \{1,..,n\}$ qualsiasi: se $j \in A$ allora $V_j \subseteq W$;

se $j \notin A$ allora $W \cap V_j = \begin{cases} V_j & \text{opp.} \\ \{0\} \end{cases}$

Ma se $W \cap V_j = \{0\}$ allora $W + V_j = \left(\sum_{i \in A} V_i\right) + V_j$ è

somma diretta, cioè $A \cup \{j\}$ ha la stessa proprietà di A: assurdo.

Segue che $W \cap V_j = V_j$, cioè $V_j \subseteq W$, e allora $V_1, .., V_t$

sono tutti in W, cioè $W = V$.

Es. 2: Applichiamo il teo. di Lie all'algebra di Lie $ad(L) \subseteq gl(L)$.

Deduciamo che L ha una bandiera di sottosp.

$$\{0\} = L_0 \subsetneq \dots \subsetneq L_n = L \qquad (n = \dim(L))$$

tali che $\dim(L_i) = i \ \forall i$, e stabili per $ad(L)$, il che vuol dire che

sono tutti ideali di L.

Es. 3: Sia $\beta \neq \alpha$. Chiaram. $W_\beta \subseteq V_\beta$, dim. $W_\beta \supseteq V_\beta$.

Abb. $V = V_\alpha \oplus W$, sia $v \in V_\beta$ e scriviamo

$v = u + w$ con $u \in V_\alpha$, $w \in W$. Sappiamo $(T-\beta)^m v = 0$ per m grande,

$$\underset{\substack{\cap \\ V_\alpha}}{(T-\beta)^m u} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{(T-\beta)^m w} = 0$$

Entrambi V_α e W sono $(T-\alpha)$-stabili, e sono anche ovviam. α $(= \alpha \cdot Id_V)$-stabili, quindi sono anche stabili per T, e per qualsiasi β $(= \beta \cdot Id_V)$ $\forall \beta \in k$. Allora $(T-\beta)^m u \in V_\alpha$ e $(T-\beta)^m w \in W$, segue $(T-\beta)^m u = 0 = (T-\beta)^m w$, cioè $w \in W_\beta$.

Vogliamo dim. $u=0$. Oss.: i polinomi $(x-\alpha)^m$ e $(x-\beta)^m$ sono primi fra loro in $k[x]$, quindi esistono $p(x)$, $q(x)$ tali che

$p(x)(x-\alpha)^m + q(x)(x-\beta)^m = 1$, e allora

$$u = 1 \cdot u = \left(p(T)(T-\alpha)^m + q(T)(T-\beta)^m\right) u = 0$$

Segue: $v = w \in W_\beta$.

Infine, oss. che V_α contiene tutti gli autovett. generalizz. di autoval. α di V, per cui $W_\alpha = \{0\}$.

ES. 4: Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V di autovett. di T.

Sia $(w_1, \dots, w_m)$ base di W, completiamola ad una base di V prendendo alcuni dei vettori di $\mathcal{B}$.

Riordinando $\mathcal{B}$ poss. assumere che siano $v_{m+1}, \dots, v_n$, cioè $(w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ è base di V.

Sia $U = \operatorname{span}\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$, allora $T(U) \subseteq U$ e $V = W \oplus U$.

Sia $p: V \to W$ la proiez. lungo U.

Dato v qualsiasi, abb. $v = u + w$ con $u \in U$, $w \in W$, e vale:

$$T(p(v)) = T(w)$$

$$p(T(v)) = p(T(u+w)) = p(\underbrace{T(u)}_{\in U} + \underbrace{T(w)}_{\in W}) = T(w)$$

Quindi $T \circ p = p \circ T$.

Segue: $\forall i$: $p(v_i)$ è autovett. di T. Infine: $p(v_1), \dots, p(v_n)$ generano W, e sono autovett. di T, quindi $T|_W$ è diagonalizzabile.

Esercizio in più: Dim. che

$$W = (V_{\alpha_1} \cap W) \oplus \dots \oplus (V_{\alpha_\ell} \cap W)$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ sono gli autoval. di T, e V_{α_i} è l'autosp. di autoval. i.

Es. 5: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad X_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Y_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad Y_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ semisemplice,

$X + Y = (X+Y)_s$, invece $X_s + Y_s = 0$.

Es. 6: Sia L nilpotente, allora tutti gli elem. di L sono ad-nilpotenti, quindi (coroll. al 1° teo. di „punto fisso") esiste una base di L tale che $ad(L) \subseteq \mathfrak{b}^u(\vec{n})$, $\vec{n} = \dim(L)$. Allora $ad(x)\,ad(y) \in \mathfrak{b}^u(n)$ $\forall x, y \in L$, e $tr(ad(x)\,ad(y)) = 0$.

Es. 7: Sappiamo che $ad(L) \subseteq \mathfrak{b}(\underset{\nwarrow \dim(L)}{n})$ in una base di L, per cui

$ad(x) \in \mathfrak{b}^u(n)$, e allora $ad(x)ad(y) \in \mathfrak{b}^u(n)$.

Es. 8:

$$ad(e)ad(h) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad(e)ad(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad(h)ad(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad(e)ad(e) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad(f)ad(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad(h)ad(h) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abb. $\kappa_L(e,f) \neq 0$ ad es., entrambi e, f sono in $[L,L]$.

Es. 9: $\operatorname{ad}(e_{st})(e_{lr}) = \underbrace{\delta_{tl}\, e_{sr} - \delta_{rs}\, e_{lt}}$

$$\operatorname{ad}(e_{ij})\operatorname{ad}(e_{st})(e_{lr}) = \operatorname{ad}(e_{ij})\left(\delta_{tl}\, e_{sr} - \delta_{rs}\, e_{lt}\right) =$$

$$= \delta_{tl}\left(\delta_{js}\, e_{ir} - \delta_{ri}\, e_{sj}\right) - \delta_{rs}\left(\delta_{jl}\, e_{it} - \delta_{ti}\, e_{lj}\right)$$

Perché contribuisca alla traccia, fra questi addendi deve comp. un multiplo di e_{lr}, cioè ho 4 possibilità:

1) $e_{ir} = e_{lr}$ con coeff. $\delta_{tl}\,\delta_{js} \neq 0$, cioè $t = l\,(=i)$, $j = s$

$(i = l)$

Cioè $e_{st} = e_{ji}$

2) $e_{sj} = e_{lr}$ $(\Rightarrow s = l,\ j = r)$ con coeff. $\delta_{tl}\,\delta_{ri} \neq 0$, cioè $t = l\,(=s)$, $r = i\,(=j)$

ma allora $i = j$: assurdo.

3) $e_{it} = e_{lr}$ $(\Rightarrow i = l,\ t = r)$ con coeff. $\delta_{rs}\,\delta_{jl} \neq 0$, cioè $r = s\,(=t)$, $j = l\,(=i)$

$\Rightarrow i = j$ assurdo.

4) $e_{lj} = e_{lr}$ $(\Rightarrow j = r)$ con coeff. $\delta_{rs}\,\delta_{ti} \neq 0$, cioè $r = s\,(=j)$, $t = i$

cioè $e_{st} = e_{ji}$.